УДК 550.831+838

Ю. Дубовенко, канд.фіз.-мат.наук

Деякі проблеми обчислення трансформацій гравітаційного поля

Точні трансформації гравітаційного поля в регіональному масштабі забезпечує розв'язання нелінійної граничної задачі Алексідзе для потенціалу сили тяжіння. Її заміна на відповідну задачу для рівняння Лапласа генерує похибки, оцінки яких наведені в статті. Чисельне моделювання останньої задачі виявило, що точність її розв'язання істотно залежить від міри обумовленості задачі, наближень напряму шуканого градієнта, параметрів чисельного методу та напряму зовнішньої нормалі, уздовж якої обчислюють похідні.

An exact gravity transforms in the regional studies is provided by the solution of the nonlinear boundary-value Alexidze problem for the gravity potential. Its substitution by the appropriate problem for the Laplace's equation generates an errors, estimated in the paper. A numerical modeling of the last problem has shown, that accuracy of its solution extremely depends on the problem's conditioning, approximations of the required gradient direction, a parameters of numerical calculus and direction of the external normal, along which the proper derivatives are calculated.

Методи трансформацій. Результатом гравіметричних зйомок є набір значень модуля градієнта потенціалу u сили тяжіння (МГПСТ) $g|_S = \mathrm{grad}\, u|_S = \psi(S)$ на деякій *замкнутій* денній поверхні S, яка цілком охоплює тяжіючі маси в області G пошуку трансформант. Задача його прямих трансформацій нетривіальна через невідомий напрям вектора $g|_S$, і не належить до лінійних граничних задач математичної фізики. При наближеному розв'язанні цієї задачі її граничні дані можна задавати на незамкнутій, але досить великій поверхні [1].

Загалом задачу трансформації значень гравітаційного поля слід вирішувати шляхом розв'язання граничної задачі безпосередньо для диференціального оператора $A(g)$ сили тяжіння в області задання $g|_S$. Взагалі нелінійне рівняння для сили тяжіння має вигляд [2]

$$A(g) = \Delta g(x_i) - a^2(g, x_i) g(x_i) = v(x_i),\ x_i \in G,\ i = \overline{1,3}, \tag{1}$$

де $a^2(g, x_i) = \sum_{i1}^{3} \cos\alpha_i \Delta \cos\alpha_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{g_j}{g}\right)^2$ – геометричний фактор поля тяжіння, $v(x_i) = -4\pi\gamma |\mathrm{grad}\,\sigma(x_i)|$ – задана функція, пов'язана з розподілом мас, α_i – кут між напрямом вектора $g|_S$ та i-ї координатної осі. Це рівняння враховує напрям сили тяжіння і складне в практичній реалізації. Якщо вектор $g|_S$ у кожній точці простору спрямований в одну і ту ж точку $P(x_i^0)$, $i = \overline{1,3}$ (уздовж нормалі до поверхні еліпсоїда), рівняння (1) спрощується [3]:

$$\Delta g(x_i) - 2g(x_i)/r^2 = v(x_i),\ r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_i^0)^2}\ . \tag{2}$$

Один із практичних способів трансформації і перерахунку значень сили тяжіння – розв'язання граничної задачі безпосередньо для значень МГПСТ [4], інший – розв'язання *нелінійної* зовнішньої граничної задачі Алексідзе для потенціалу сили тяжіння:

$$\Delta u(x_i) = \begin{cases} -4\pi f \sigma(x_i),\ x \notin G \\ 0, \qquad x \in G \end{cases},\ u|_\infty = 0,\ \mathrm{grad}\, u|_S = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}\Bigg|_S = g|_S = \psi(S),\ i = \overline{1,3}. \tag{3}$$

Лінеаризує цю задачу припущення щодо напрямку МГПСТ на поверхні S, але воно вносить значні похибки, а визначення напряму – не менш громіздка задача, ніж визначення МГПСТ. Зокрема, для зовнішньої тяжіючої точки отримано рівняння [3]

$$g \Delta \cos\alpha_i \sum_{i=1}^{3} g_{x_i} \frac{\partial \cos\alpha_i}{\partial x_i} + \Delta g \cos\alpha_i = 0,\ i = \overline{1,3},$$

які визначають модуль сили тяжіння g за відомим розподілом кутів α_i в просторі G або косинуси кутів α_i за відомими значеннями g у просторі G (виникає невизначеність $\cos\alpha_i$ на ∞).

Питання розв'язності і єдиності задачі (3) принципове для гравіметрії: воно відповідає, чи можливе високоточне *однозначне* визначення сили тяжіння в зовнішньому просторі за високо-

точними абсолютними значеннями сили тяжіння на замкнутій поверхні S, яка цілком охоплює усі маси, і які потрібні мінімальні додаткові дані. За одночасного визначення на поверхні S абсолютних значень і напряму сили тяжіння її обчислення в зовнішньому просторі нескладне, але такі роботи дорогі і в масових розвідувальних роботах не проводяться.

Розв'язують задачу (3) шляхом послідовних наближень. У плоскому випадку задача визначення гармонічної функції, модуль градієнта якої заданий на *замкнутому контурі*, не має єдиного розв'язку [3].

Якщо граничні значення $\psi(S)$ і функція u залежить від двох змінних, гранична задача (3) стає плоскою

$$\Delta u(x_i)=0,\ x_i\in G,\ u\big|_\infty=0,\ \operatorname{grad}u\big|_S=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}\Bigg|_S=\psi(S),\ i=\overline{1,2}. \quad (4)$$

Якщо $f(z)=u(x_i)+iv(x_i),\ i=\overline{1,2}$ – довільна голоморфна в G функція, реальна частина якої співпадає з розв'язком граничної задачі (2), її уявна частина *теж* є розв'язком задачі (4).

Співвідношення Коші-Рімана $k_1\cdot k_2=-1$, де $k_1=\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_1}$ і $k_2=\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial v}{\partial x_1}$ – кутові коефіцієнти прямих, спрямованих уздовж градієнтів функцій u і v, є умовою їх перпендикулярності.

Нехай у скінченному μ- околі напряму l градієнта $grad\,U=\frac{\partial u}{\partial l}$ одного з розв'язків граничної задачі (4) не існує іншого розв'язку задачі (4), тобто, не існує двох розв'язків задачі (4), напрями градієнтів яких складали б менший за μ кут. Кут між градієнтами двох розв'язків задачі (4) – $\pi/2$, а розв'язки, що різняться між собою константою – тотожні.

Для перевірки цього припущення чисельно змодельовано методом розкладення за неортогональними функціями [5] граничну задачу (4) за допомогою збіжного ітераційного процесу

$$\Delta u^k(x_i)=0,\ \sum_{i=1}^{2}\alpha_i\left(u^{k-1}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}=\psi(S),\ i=\overline{1,2}, \quad (5)$$

де u^k – k-те наближення розв'язку граничної задачі (4), а коефіцієнти напрямних косинусів $\alpha_i\left(u^{k-1}\right)=\frac{\partial u^{k-1}}{\partial x_i}\Bigg/\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u^{k-1}}{\partial x_i}\right)^2}$ отримані з нормування граничних умов задачі (4).

Похибки трансформацій. Похибка ε заміни рівняння (2) на рівняння Лапласа $\Delta g(x_i)=0$ на сфері G радіусу a з початком координат у її центрі, в точці $x_i=0,\ i=\overline{1,3}$ дорівнює

$$a^2\gamma_2/6\le\varepsilon\le a^2\gamma_1/6 \quad (6)$$

де за умови, що область G дотична до поверхні Землі, нормальне гравітаційне поле:

$$\gamma_1=\max_{x_i\in G}2g(x_i)/r^2\le 2\max_{x_i\in G}g(x_i)\Big/\left[\min_{x_i\in G}r\right]^2\approx\frac{2\cdot 981000\ \text{мГл}}{6360^2\ \text{км}^2},$$

$$\gamma_2=\min_{x_i\in G}2g(x_i)/r^2\le 2\min_{x_i\in G}g(x_i)\Big/\left[\max_{x_i\in G}r\right]^2\approx\frac{2\cdot(978000-300a)\ \text{мГл}}{(6380+a)^2\ \text{км}^2},$$

звідки, згідно (6), одержуємо при $a=100$ км – 76 ≤ ε ≤81 мГал. При перерахунку сили тяжіння у вільному просторі за формулою Пуассона похибка може сягати 100 мГал на великих площах земної поверхні. У плоскому випадку при $x_i=0,\ i=\overline{1,3}$ дає 51 ≤ ε ≤54 мГал. За (6), $\varepsilon=g-\overline{g}\le 0$, тому дійсне значення сили тяжіння завжди *менше*, ніж одержане у припущенні її гармонічності. Порівняння похибок вказує, що рівняння сили тяжіння краще апроксимувати рівнянням (2), ніж Лапласа.

У практиці гравіметрії при перерахунку в зовнішній простір розв'язують не внутрішню граничну задачу, а зовнішню. Похибка перерахунку у зовнішньому просторі (заміну зовнішньої граничної задачі $\Delta g(x_i)-2g(x_i)/r^2=0$ на зовнішню задачу $\Delta g_1(x_i)=0$ за однакових граничних умов $g\big|_{r=a}=\psi(S),\ g\big|_\infty=0$) дорівнює $\varepsilon=\frac{c}{a}\left(\frac{a}{r^2}-\frac{1}{r}\right)$ і максимумальна за умови $\varepsilon\big|_{r=2a}=-g(a)/4$,

де $g(a)$ – сила тяжіння на поверхні сферичної Землі. Припущення гармонічності сили тяжіння в перерахунку майже на висоту земного радіуса (6000 км) дає похибку ~ 245 Гал.

Отже, для трансформації спостереженого (і нормального) поля сили тяжіння у зовнішньому просторі слід розв'язати [5] граничну задачу для рівняння сили тяжіння (2), конкретні оператори якого для різних референц-поверхонь [4] земного еліпсоїда обертання з малим стисненням не генерують істотно різних результатів поблизу Землі. Явні аналітичні вирази фундаментальних розв'язків рівняння (2) отримано в [6].

Похибки аномалій. Перерахунок „аномалії" сили тяжіння $\delta g = g(S) - \gamma(S)$ (різниці нормального і спостереженого поля сили тяжіння) має свої нюанси [7].

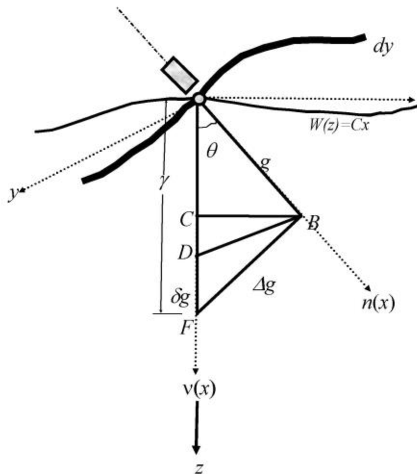


Рис. 1. Геометричне тлумачення аномалій

Через векторну природу δg обчислене аномальне поле відрізнятиметься від істинної величини аномалії сили тяжіння (рис. 1) $\left|\overrightarrow{BF}\right| = \left|\vec\gamma - \vec g\right| = \sqrt{\left|\vec\gamma\right|^2 + \left|\vec g\right|^2 - 2\left|\vec g\right|\left|\vec\gamma\right|\cos\alpha}$, де α – кут між нормальним $\overrightarrow{OE} = \vec\gamma$ і виміряним $\overrightarrow{OB} = \vec g$ вектором сили тяжіння, CF – проекція вектора аномалії $\overrightarrow{BF}$ на напрям $\vec\gamma$, $FD = \left|\vec\gamma\right| - \left|\vec g\right|$ – звичайне значення аномалії, CD – його відхилення від проекції аномалії. Підставивши замість $\left|\vec g\right|$ $\left|\vec\gamma\right| - FD$, маємо $\left|\overrightarrow{BF}\right| = \sqrt{2}\left|\vec\gamma\right|\sqrt{1 - \frac{FD}{|\gamma|} + \frac{FD^2}{2|\gamma|^2} - \cos\alpha + \frac{FD}{|\gamma|}\cos\alpha}$. І за $FD = 0$ ($\left|\vec\gamma\right| - \left|\vec g\right| = 0$) аномалія сили тяжіння може бути значною, оскільки $\left|\overrightarrow{BF}\right| = 2|\gamma|\sin\alpha/2$, і при α =15" $\left|\overrightarrow{BF}\right| \approx 70$ мГал. На цю величину можуть відрізнятися звичайні аномалії сили тяжіння $\left|\vec\gamma\right| - \left|\vec g\right|$ від точних.

Якщо б значення $\left|\vec\gamma\right| - \left|\vec g\right|$ давали високоточну аномалію сили тяжіння, її неможливо перераховувати у зовнішньому просторі: рівняння сили тяжіння істотно *залежить від швидкості зміни кутів* між напрямом сили тяжіння (аномалії) і координатними осями. В локальних аномаліях цей напрям може сильно варіювати і будь-яке наближене припущення щодо нього істотно спотворить перераховані аномалії. Вираз $\left|\vec\gamma\right| - \left|\vec g\right|$ з точністю $CD = 2|g|\sin^2\alpha/2$ співпадає з проекцією вектора аномалії на напрям вектора $\vec\gamma$ (за Юнгом); при α =15" $CD = 2\cdot 10^{-3}$ мГал.

У потенціалі W аномальних мас, які генерують аномалію сили тяжіння, його частинні похідні в будь-якому напрямі співпадають з проекціями аномалій сили тяжіння за цим напрямом, $\left|\vec\gamma\right| - \left|\vec g\right| = \partial W/\partial x_3$, де x_3 – спрямоване за напрямом вектора $\vec\gamma$. На площах у кількадесят км зміною напряму $\vec\gamma$ нехтують, і аномалія $\left|\vec\gamma\right| - \left|\vec g\right|$ майже гармонічна. З точністю $0 \le \varepsilon \le 0{,}04$ мГал аномалії сили тяжіння *на рівнині* є значеннями вертикальної складової за напрямом модуля градієнта.

Перерахунок у нижній півпростір з відомою густиною $\sigma(P)$ в рівнянні (2) нескладний. Але в практиці регіональної гравіметрії при перерахунку у бік мас нерідко на поверхні *S* відомі складові $\partial W/\partial x_3$ аномалії, а під поверхнею аномальні маси розташовані на *невідомій* віддалі від неї і слід гармонічно продовжити $\partial W/\partial x_3$ у бік аномальних мас до найближчих особливих точок поля. У такій постановці ця задача – *істотно некоректна* (має нескінченну множину розв'язків [4]).

Чисельне моделювання. Чисельне розв'язання нелінійної граничної задачі (3) у просторовому випадку здійснене за ітераційним процесом

$$\Delta u_n = 0, \quad \left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(u_{n-1})\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right]_S = \psi^2(S), \tag{7}$$

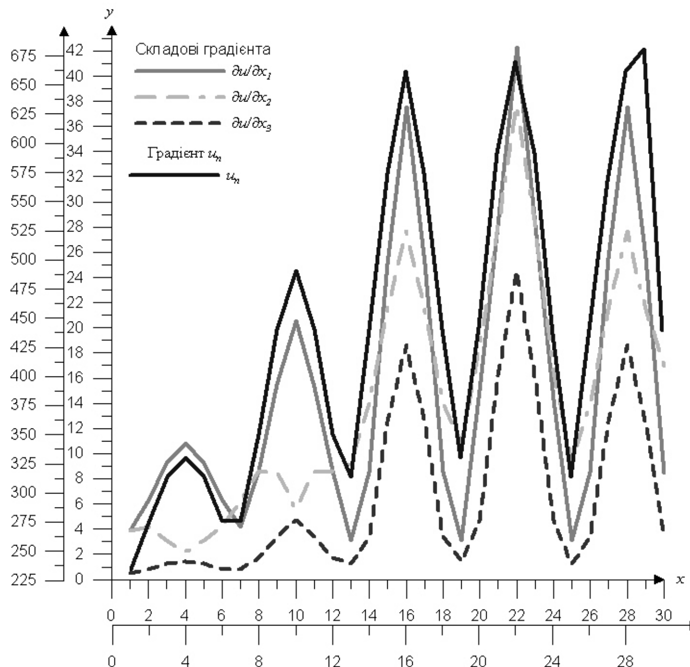
де u_n і u_{n-1} – *n*-е і (*n*-1)-е наближення, $\alpha_i(u_{n-1})$ – *i*-й спрямовуючий косинус градієнта (*n*-1)-го наближення u_{n-1}. З метою перевірки збіжності ітераційного процесу (10) розв'язано зовнішні граничні задачі

$$\Delta u = 0, \quad \left|\operatorname{grad} u\right|_S = \frac{h}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{8}$$

$$\Delta u = 0\,,\ \left|\mathrm{grad}\, u\right\|_S = \frac{h}{(x_1 - h)^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{h}{(x_1 + h)^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{9}$$

$$\Delta u = 0\,,\ \left|\mathrm{grad} u\right\|_S = h\sqrt{\frac{2\left(x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2\right)}{\left((x_1 - h)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left((x_1 + h)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)}} + \sqrt{\frac{\left(x_1^2 + x_2^2 - 2hx_1 + x_3^3\right)}{\left((x_1 - h)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3} + \frac{\left(x_1^2 + x_2^2 - 2hx_1 + x_3^3\right)}{\left((x_1 + h)^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}} \tag{10}$$

де $h = 10$, $x_3 = 5$ км, S – горизонтальна площина. Точний розв'язок граничних задач (8) і (10) дорівнює $u = \frac{h}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ і $u = \frac{h}{\sqrt{(x_1 - h)^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \frac{h}{\sqrt{(x_1 + h)^2 + x_2^2 + x_3^2}}$, а (9) точного розв'язку не має. На рис. 2 наведені точні значення градієнта u_n і похідних задачі (8) у 30 точках рівномірної мережі поверхні S з кроком $\Delta x_i = 10$ км на в області -25 км $\leq x_2 \leq$ 25 км, - 25 км $\leq x_1 \leq$ 15 км при грубих наближеннях напрямних косинусів – $\alpha_1(u_1) = \alpha_2(u_1) = 0,\ \alpha_3(u_1) = 1$. У іншому варіанті розв'язку $\alpha_1(u_1) = 0.8,\ \alpha_2(u_1) = 0,\ \alpha_3(u_1) = 0.6$. Як видно з фрагменту таблиці, градієнт u_n і права частини граничної умови (8) співпали з точністю ε=10^{-6} за 5 ітерацій у першому варіанті і за 6 – у другому. Модулі градієнтів точного і наближеного співпали з точністю 10^{-7}.



№	u_n	$\frac{\partial u_n}{\partial x_1}$	$\frac{\partial u_n}{\partial x_2}$	$\frac{\partial u_n}{\partial x_3}$
1	234,561	3,875	3,876	0,518
2	275,455	6,281	4,188	0,839
3	313,623	9,262	3,087	1,236
4	330,394	10,819	2,202	1,442
5	313,686	9,262	3,086	1,234
6	275,596	6,283	4,191	0,837
7	275,607	4,190	6,282	0,837
8	350,166	8,581	8,581	1,713
9	440,122	15,497	8,533	3,412
10	490,258	20,553	5,588	4,712
11	440,203	15,269	8,533	3,412
12	350,065	8,582	8,584	1,717

Рис 2. Розв'язання зовнішньої граничної задачі Алексідзе (8) і фрагмент відповідної таблиці даних, $\times 10^3$.

Кожну з граничних задач розв'язували для різних перших наближень і положень допоміжних точок [5], що визначають фундаментальні розв'язки. Рис. 2 відповідає випадку, коли допоміжні точки взяті на площині $x_3 = 1$. Число ітерацій у варіантах не перевищувало 10. Хоча *граничні значення* точних і наближених градієнтів співпали з точністю ε=10^{-7}, вони самі співпали з меншою точністю через *погану обумовленість* взагалі задач з похідними в граничних умовах (для них, на відміну від задачі Діріхле, не діє принцип максимуму) і це слід врахувати в практичному моделюванні.

Точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, яка створює поле у задачі (11), є однією з допоміжних точок [5], що визначають фундаментальні розв'язки. Це пояснює чималу точність визначення похідних $\partial u/\partial x_i$ за наближеним значенням розв'язку. Якщо ця точка не входить до складу допоміжних точок, точність визначення похідних гірша, особливо для $\partial u/\partial x_3$.

У дослідженні похибки розв'язку граничної задачі (8) задіяно 36 фундаментальних розв'язків, рівномірно розташованих на площині $x_3 = 1$, межею S є площина $x_3 = 5$. Ліва і права частина граничних умов (8) після 4-ї ітерації співпали з точністю ε=10^{-6}, відносна похибка розв'язку u сягла 10%, абсолютна – 10^{-1}; для похідних – похибки сягають 80%. Збільшення числа функцій до 49 знизило похибку розв'язку u і похідних до 3-5%, і $\partial u/\partial x_3$ – до 20%. Дальше нарощення

до 64 *збільшило* похибку розв'язку і похідних до 70%, хоча права і ліва частини граничної умови (8) після 8 ітерацій співпали з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$. Цей ефект пояснюють [4] немінімальністю систем фундаментальних розв'язків і малістю детермінанта матриці коефіцієнтів для фундаментальних розв'язків.

Коли напрям градієнта на *всій* границі S складає з внутрішньою нормаллю *гострий кут*, зовнішня гранична задача (3) розв'язується із задовільною точністю і похибка зумовлена не поганою збіжністю ітерацій (14) (число ітерацій мале), а поганою обумовленістю граничної задачі з косою похідною.

Гранична задача з косою похідною уздовж напряму l

$$\Delta u = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_S = \psi(S) \tag{11}$$

за умови, що напрям зовнішньої нормалі N *неортогональний* напряму l (l в жодній точці границі G не співпадає з дотичною)

$$\inf_{x_2 \in S}(N,l) > 0 \tag{12}$$

не має відмінного від сталого розв'язку [8]. У граничних задачах (8-10) ця умова виконується на будь-якій *скінченній частині* площини S, оскільки поле створене точковим джерелом, а на *всій* нескінченній площині – **ні**, оскільки в нескінченно віддаленій точці площини S $\left.(N,l)\right|_{x_2=\infty} = 0$. Для внутрішньої граничної задачі (11) і точкового джерела P поза областю G умова (12) для достатньо гладкої границі *не виконується*, оскільки завжди існуватиме точка на S, в якій радіус-вектор з початком в P ортогональний до нормалі. Чисельні експерименти на сфері G виявляють погану обумовленість граничної задачі (11): граничні умови задовольняються добре, а обчислені і точні значення градієнту u і його похідних – *істотно різні*.

Розв'язок внутрішньої граничної задачі (8) для одиничного куба G (зовнішня нормаль має 6 різних напрямів, початок координат (0,0,0) – на відстані 0,2 від нижньої кромки куба, 24 допоміжні точки узяті на кубі зі стороною 1,4) за (10) при $\alpha_1(u_1) = \alpha_2(u_1) = 0,\ \alpha_3(u_1) = 1$ такий: після 5-ї ітерації граничні значення задовольнялися (ε <1%), а наближення u і його похідні не мали спільного з точним розв'язком $U = h\big/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ і його похідними; нарощення числа ітерацій до 24 не збільшило точність наближень. У табл. 1 у 4-х точках границі, що є точками коллокації, дані точні і наближені значення градієнта і похідних. У решті точок значення функції через симетрію співпадають з одним з наведених в табл. 2. Додали 25-й фундаментальний розв'язок, який співпадає з точним розв'язком задачі (8). Після 4-ї ітерації граничні умови та значення розв'язку і похідних задовольнялися з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Щоб розділити вплив нестійкості граничної задачі (11) на сумарну похибку розв'язку задачі (8), вирішено задачу (11) для функції $U = h\big/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Останні стовпці табл. 1 дають її розв'язок $\bar{u}$ у тих же точках: похибка зумовлена нестійкістю задачі (14), а не повільною збіжністю ітерацій (7).

Таблиця 1. Розв'язок внутрішньої граничної задачі (8) та задачі з косою похідною (11) для одиничного куба.

№	u	$\frac{\partial u}{\partial x_1}$	$\frac{\partial u}{\partial x_2}$	$\frac{\partial u}{\partial x_3}$	u_n	$\frac{\partial u_n}{\partial x_1}$	$\frac{\partial u_n}{\partial x_2}$	$\frac{\partial u_n}{\partial x_3}$	$\bar{u}$	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}$	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}$	$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3}$
1	21	29	29	19	39	4	4	45	30	10	10	78
2	8	1	1	1	28	0	0	8	12	1	1	5
3	14	14	8	11	36	18	2	8	19	11	6	18
4	9	3	2	6	30	18	0	8	13	1	2	8

Збіжність ітерацій (5) для плоского випадку має особливості: розв'язок зовнішньої граничної задачі (4) з граничною умовою $\psi(S) = 1\big/\left.\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right|_S \equiv 1$ і точним розв'язком $u = \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ для одиничного круга з центром в початку координат з напрямами $\alpha_1^0 = \cos(t+\varphi)$, $\alpha_1^0 = \sin(t+\varphi)$ (t – центральний кут, φ – збурення початкового напряму градієнта шуканої функції) має похибки, що залежать від положення точок ітерації. У табл. 2 дано кількість ітерацій N до умови їх зупинки $|\varepsilon_1| = \left|\left|\operatorname{grad} u^{(k)}\right| - 1\right| < 10^{-5}$, максимальні похибки розв'язків після кожної ітерації у точках коллокації для похідних – $\varepsilon_1 < 10^{-4}$, а посередині між точками коллокації в кінцевому розв'язку $\varepsilon_2 \approx 10^{-4}$, де $\varepsilon_{1,2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \max\left|\frac{\partial u^{(1,2)}}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$.

Таблиця 2. Параметри розв’язку плоскої зовнішньої граничної задачі (4) для одиничного круга.

φ	0,001	0,1	0,1	1	1	1,57	1,57	3,14
N	1	2	3	2	3	2	3	1
$\varepsilon_1(\mathrm{grad}\, u)$	3×10^{-6}	5×10^{-3}	4×10^{-6}	8,5×10^{-1}	5×10^{-6}	9,98×10^{-1}	6×10^{-5}	4×10^{-6}

Розв’язок внутрішньої граничної задачі за сприятливих умов визначається з точністю до сталої (тому не порівнюємо точний і наближений розв’язки) і знаку (при $\varphi = \pi$ 1-ша ітерація задовольняє граничній задачі).

Для тієї ж задачі (4) при радіусі кола $r = 2$ узяті числа $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \sqrt{2}/2$ (напрям градієнта співпав з прямою $x_1 = x_2$). Цей напрям у точках $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ кола утворює з нормаллю кут 90°, тому не виконується умова (12). Точний розв’язок цієї задачі u = 0.693, а значення граничної умови $\psi(S)$ = 0,5. Рис. 3 ілюструє розв’язок задачі (4) (9 ітерацій, x_1, x_2 – координати граничних точок коллокації). Градієнти наближеного і точного розв’язку близькі, самі розв’язки і їхні похідні *істотно різні*, оскільки наближення $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \sqrt{2}/2$ не забезпечує умови (12).

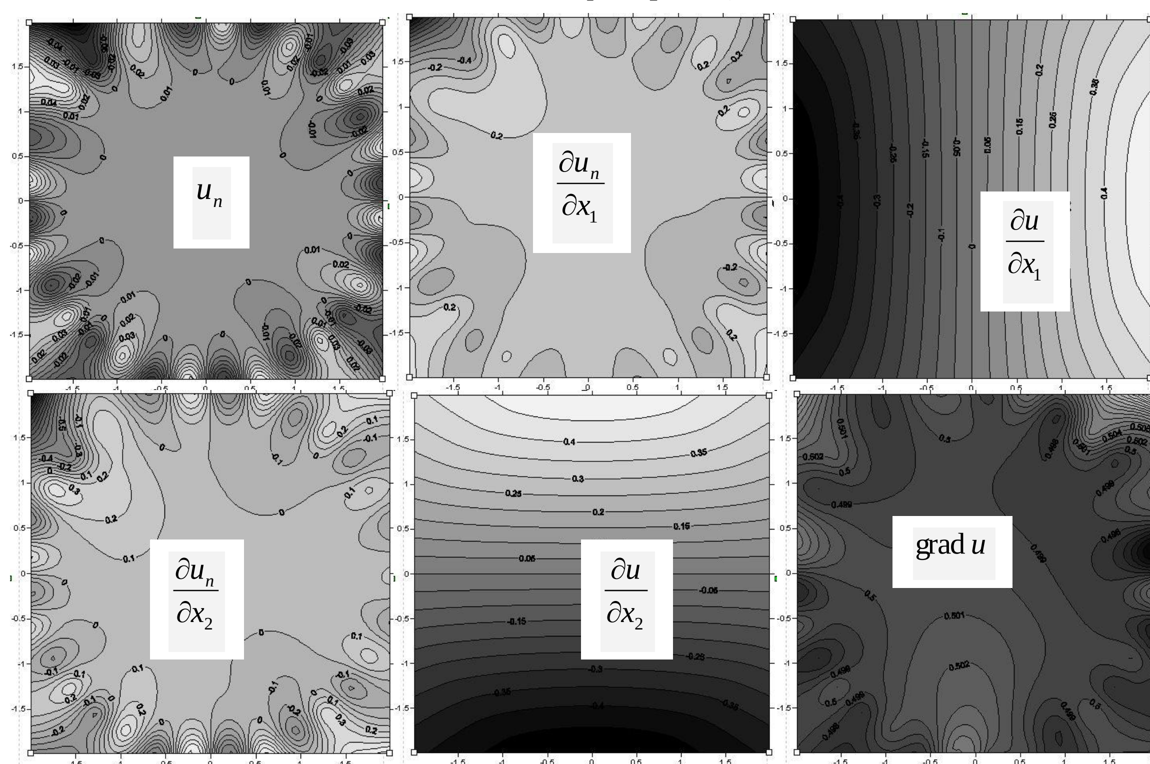


Рис. 3. Розв’язок зовнішньої граничної задачі (4) для круга з $r = 2$ при $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \sqrt{2}/2$.

Отже, для збіжності ітерацій (5) необхідно не лише, щоб *точний розв’язок задовольняв умові* (12), а і вибір початкових наближень, для яких в ітераціях (5) *не виникали б коефіцієнти* α_i^k, які не забезпечують умови (12).

Розв’язання *внутрішньої* граничної задачі для одиничного круга з центром в початку координат і граничною умовою $\psi(S) = 1/\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2}$ за ітераціями (5) здійснено за напрямом градієнта $\alpha_1^0 = 0.8315$, $\alpha_2^0 = 0.5556$, що, як і будь-який постійний напрям, не забезпечує виконання умови (12). Рис. 3 ілюструє наближений розв’язок задачі після 8 ітерацій. Точний розв’язок $u = \ln\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2}$, але комплексно-спряжена ($\omega = u + iv$ – голоморфна функція) з ним функція v завдяки відношенню Коші-Рімана теж задовольняє цій задачі. За цих α_i^0 ітерації (5) збігаються не до точного розв’язку u, а комплексно-спряженої функції v, що особливо видно на прикладі горизонтальних похідних (рис. 4).

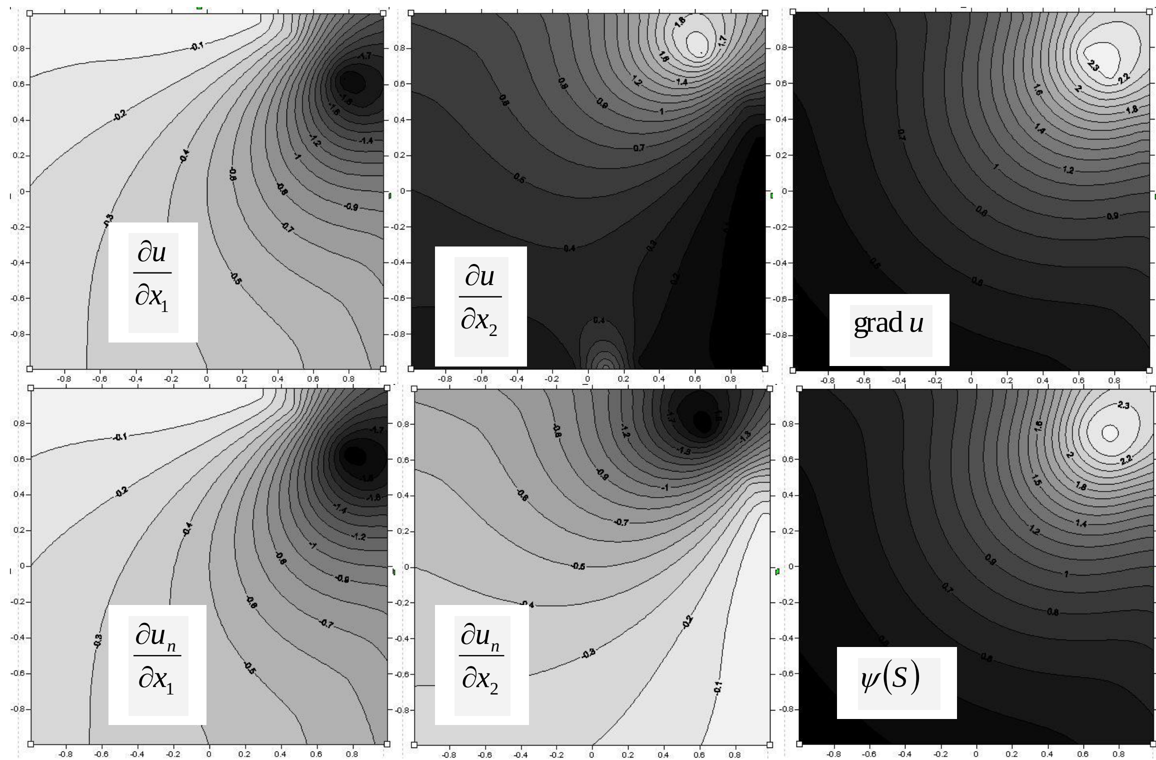


Рис. 4. Розв'язок внутрішньої граничної задачі (4) для одиничного круга

Моделювання аномалій. На практиці відшукують не потенціал $w = u + v$ сили тяжіння, а потенціал u аномалії сили тяжіння, де потенціал нормальної сили тяжіння v вважають *відомим*. За *лінійних* наближень граничних задач граві- і магнітометрії цей перехід до аномалії *не змінює* не лише рівняння, а і вигляд оператора граничних умов, необхідно лише за граничну функцію $\psi(S)$ узяти аномалію сили тяжіння.

У нелінійних граничних задачах перехід до аномалії *змінює ліву частину* граничних умов (3, 4), так як операція обчислення модуля градієнта не дистрибутивна: $|\mathrm{grad}\, w| \neq |\mathrm{grad}\, u| + |\mathrm{grad}\, v|$. Якщо гранична функція $\psi(S)$ – модуль градієнта потенціалу w сили тяжіння, для потенціалу аномалії u одержуємо нелінійну граничну задачу:

$$\Delta u = 0,\ \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \psi^2(S) - |\mathrm{grad}\, v|^2,\ u_\infty = v_\infty \qquad (13)$$

граничні значення якої за нульового потенціалу нормальної сили тяжіння співпадають з граничними умовами (3). Для розв'язання цієї задачі задіяно один з варіантів таких послідовних наближень (умови на ∞ опущені):

$$\Delta u_{n+1} = 0,\ \left.\frac{\sum_{i=1}^{3}\left(2\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i}}{|grad(v + u_n)|}\right|_S = \psi(S) - \frac{|\mathrm{grad} v|^2}{\psi(\mathrm{S})},$$

$$\Delta u_{n+1} = 0,\ \left.\frac{\sum_{i=1}^{3}\left(2\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i}}{\psi(S)}\right|_S = \psi(S) - \frac{|\mathrm{grad}\, v|^2}{\psi(\mathrm{S})}, \qquad (14)$$

$$\Delta u_{n+1} = 0,\ \left.\sum_{i=1}^{3}\left(2\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i}\right|_S = \psi^2(S) - |\mathrm{grad} v|^2 \cdot$$

З'ясування чисельної швидкості збіжності ітерацій (14) має практичний інтерес, бо на кожній ітерації розв'язується гранична задача і слабкозбіжні процеси істотно погіршують практичну експлуатацію алгоритмів.

Збіжність (14) обчислено методом [4] на границі S у вигляді площини $x_3 = 5$ на моделі

$$U = \frac{h}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},\ V = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + h)^2}},\ \psi(S) = |\mathrm{grad}(U + V)|$$

на 36 вузлах коллокації в точках (x_1 = -25+10k, x_2 = -25+10j, x_3 = 5, k, j = 1, 2, 3, 4, 5) границі S для 36 фундаментальних розв'язків, полюси яких є під вузлами коллокації на площині $x_3 = 1$. Ітерації тривали до виконання умови $\max_S \left\| \mathrm{grad}(v + u_n) \right| - \psi(S) \right| < \varepsilon$. При $\varepsilon = 10^{-3}$ 1-й ітераційний процес завершився за 3 ітерації, другий – за 36, а останній – за 103 ітерації, а при $\varepsilon = 10^{-4}$ – за 4, 79 і 147 відповідно.

Для першої з ітерацій (14) розв'язана гранична задача з похідною уздовж x_3 на границі. Допоміжні точки для фундаментальних розв'язків узяті на площині $x_3 = 1$. Наближення розв'язку і його похідних добре співпадають між собою (при $\varepsilon = 10^{-3}$ з точністю 10^{-2}, при $\varepsilon = 10^{-4}$ з точністю 10^{-3}), але далекі від точних. У табл. 3 дані їх середньоквадратичні значення у вузлах коллокації (1-й стовпець) і у середині між ними (2-й стовпець), а в табл. 4 – відповідні похибки для різних $\varepsilon = 10^{-k}$ (k = 1, 2.., 5) і N.

Таблиця 3. Наближені розв'язки нелінійної граничної задачі (14) на площині.

N	u		$\partial u/\partial x_1$		$\partial u/\partial x_2$		$\partial u/\partial x_3$	
36	0.565	0.598	0.029	0.021	0.029	0.021	0.026	0.067
64	0.605	0.611	0.032	0.028	0.032	0.028	0.038	0.053
120	0.616	0.614	0.030	0.032	0.030	0.032	0.047	0.044

Таблиця 4. Похибки розв'язків нелінійної граничної задачі (14) на площині при різних рівнях точності.

k	$\varepsilon(u)$		$\varepsilon(\partial u/\partial x_1)$		$\varepsilon(\partial u/\partial x_2)$		$\varepsilon(\partial u/\partial x_3)$		N
1	0.206	0.025	0.019	0.007	0.019	0.007	0.025	0.056	36
3	0.048	0.172	0.019	0.006	0.019	0.006	0.018	0.057	
5	0.050	0.173	0.019	0.006	0.019	0.006	0.018	0.057	
1	0.492	0.479	0.017	0.010	0.017	0.010	0.026	0.033	64
3	0.018	0.066	0.013	0.004	0.013	0.004	0.011	0.030	
1	0.647	0.613	0.013	0.013	0.013	0.013	0.026	0.023	121
2	0.028	0.027	0.001	0.001	0.001	0.001	0.003	0.003	
4	0.005	0.007	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	

За табл. 4 виявлено, що *збільшення точності апроксимації* граничних умов у вузлових точках коллокації без збільшення кількості вузлових точок (і, отже, збільшення числа функцій, що беруть участь у розкладанні) *не впливає на похибку* (починаючи з k = 2). Ці обставини виявляють нелінійну поведінку похибок чисельного розв'язання граничних задач з похідними і спонукають досліджувати похибки розв'язків *кожної* конкретної задачі.

Висновки. Трансформацію значень поля сили тяжіння у зовнішньому просторі можна здійснити через розв'язання граничної задачі (3) для рівняння сили тяжіння (2), конкретний вигляд якого залежить від обраної моделі Землі. У плоскому випадку ця операція зведена до розв'язання граничної задачі (4) з ітерацій (5). Точність її розв'язання істотно залежить від міри обумовленості задачі, наближень напряму шуканого градієнта, параметрів чисельного методу [5] (числа і положення фундаментальних розв'язків), та напряму зовнішньої нормалі, уздовж якої обчислюють похідні в граничних умовах (виконання умови (12). Попри це, її розв'язання на простих моделях за певних обмежень – успішне.

Основними джерелами неоднозначності розв'язків задачі є скінченна вертикальна роздільна здатність розв'язку, неадекватний вибір моделі задачі чи початкових наближень розв'язку.

1. *Алексидзе М.А.* Редукция силы тяжести. – 1965; 2. *Черный А.В.* Об уравнении силы тяжести // ДАН УССР. – Сер. Б. – 1970. – С. 145-149; 3. *Алексидзе М.А.*, *Гелашвили М.С., Картвелишвили К.М.* Исследование некоторых вопросов трансформации потенциальных полей. – 1972; 4. *Алексидзе М.А.* Решение некоторых основных задач гравиметрии. – 1985; 5. *Алексидзе М.А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – 1978; 6. *Черный А.В.* Описание гравитационных аномалий // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1982, № 4. – С. 18-21; 7. *Дубовенко Ю.І.* Про роздільну здатність редукцій аномалій сили тяжіння // Геофіз. журн. – 2010. – 32, № 2. – (в друці); 8. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – 1966; 9. Интерпретация гравитационных и магнитных полей: Сб. науч. тр. / Отв. ред. *Старостенко В.И.* – 1992.

Dubovenko Yu. Some problems of the gravity transformations calculation.
Дубовенко Ю.И. Некоторые проблеммы вычисления трансформаций гравитационного поля.

Ключові слова: гравітаційне поле, трансформації, нелінійна задача, потенціал сили тяжіння, похибки аномалій, чисельне моделювання, коса похідна.

Ключевые слова: гравитационное поле, трансформации, нелинейная задача, потенциал силы тяжести, погрешности аномалий, численное моделирование, косая производная.

Key words: gravity field, transformations nonlinear problem, gravity potential, anomaly errors, numerical modelling, oblique derivative.

Точные трансформации гравитационного поля в региональном масштабе обеспечивает решение нелинейной граничной задачи Алексидзе для потенциала силы тяжести. Ее замена на соответствующую задачу для уравнения Лапласа генерирует погрешности, оценки которых приведены в статье. Численное моделирование последней задачи показало, что точность ее решения существенно зависит от меры обусловленности задачи, приближений направления искомого градиента, параметров численного методи и направления внешней нормали, вдоль которой вычисляют производные.